Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 19, pp. 239–244. Pergamon Press 1976. Printed in Great Britain

ETUDE THEORIQUE DES FLUX DE DIFFUSION, OU DE CONDUCTION, SUR UN NOMBRE FINI DE SURFACES ACTIVES EN INTERACTION, SEPAREES LES UNES DES AUTRES PAR DES ZONES INERTES, DANS UN FLUIDE VISQUEUX NEWTONIEN OU NON, EN ECOULEMENT LAMINAIRE OU TURBULENT

ARYADI SUWONO, MICHEL DAGUENET et DANIEL BODIOT
Laboratoire de Cinétique Electrochimie, Centre Universitaire de Perpignan, Avenue de Villeneuve de la Raho, 66025 Perpignan, France

(*Reçu le* 19 *février* 1975)

Résumé—On calcule la distribution de la concentration ou de la température au-dessus d'une suite de zones alternativement inactives et actives ainsi que les flux limites de diffusion ou de conduction sur les zones actives, compte-tenu de leurs intéractions.

Ce calcul est valable pour les écoulements unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels à symétrie axiale. Il est indépendant de la loi de comportement du fluide supposé visqueux.

NOTATIONS

$A_i(u)$, fonction d'Airy de la variable u avec
$$\frac{A_i'(0)}{A_i(0)} \simeq -0{,}729;$$

a_k, défini par: $a_k = 3^k \dfrac{\Gamma(k+\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}$;

b_k, défini par: $b_k = 3^k \dfrac{\Gamma(k+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}$;
$$b_{k,m} = \frac{2^k\Gamma(k-m+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})};$$

$B_i(u)$, fonction d'Airy de la variable u;

c_k, défini par: $c_k = 3^k \dfrac{\Gamma(k+\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})}$;
$$c_{k,m} = \frac{3^k\Gamma(k-m+\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})};$$

C, concentration (mole . cm^{-3}) ou température;

C_∞, concentration ou température supposée constante au sein du fluide;

$C_n(x, y)$, concentration ou température au-dessus de la zone d'indice n avec $C_0(x, y) = C_\infty$;

$C_n^0(y)$, valeur de $C_n(x, y)$ sur la frontière aval de la zone d'indice n;

C_n^+, concentration ou température réduite définie par la relation:
$$C_n^+ = \frac{C_n - C_\infty}{C_\infty};$$

$\overline{C_n^+}$, transformée de Laplace de C_n^+ par rapport à θ_n définie par la relation:
$$\overline{C_n^+}(S_n, Z_n) = \int_0^\infty \exp(-S_n\theta_n)C_n^+(\theta_n, Z_n)\,d\theta_n$$
où S_n est la variable transformée de Laplace de θ_n;

D, coefficient de diffusion ou diffusivité thermique;

$f_{(x)}$, fonction de la variable x;

$F_{(u)}$, fonction de u définie par:
$$F_{(u)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^u \frac{d\lambda}{\lambda^{2/3}(1+\lambda)};$$

j, densité du flux limite de diffusion ou de conduction sur la surface;

J, flux limite intégré de diffusion ou de conduction sur la surface;

j_n, J_n, valeurs de j et de J sur la zone active d'indice n;

J_T, valeur totale des flux sur toutes les surfaces actives;

K_n, largeur d'une zone d'indice n dans la direction perpendiculaire aux axes des x et des y dans le cas des écoulements unidimensionnels et bidimensionnels; nombre égal à 2π dans le case des écoulements tridimensionnels à symétrie axiale;

$M_{i,k}$, quantité définie par $\dfrac{Z_k}{Z_1}$;

N, facteur de collection au sens d'Albery [4];

$r_{(x)}$, nombre égal à l'unité dans le cas des écoulements unidimensionnels et bidimensionnels et distance normale d'un point de la surface à l'axe de symétrie dans le cas des écoulements tridimensionnels à symétrie axiale;

S_n, variable transformée de Laplace de θ_n;

S_0, coefficient indépendant de x et de y;

u, variable;

V_x, V_y, composante en x et y de la vitesse relative du fluide par rapport à la surface dans la couche limite;

x, coordonnée tangentielle mesurée à partir du bord d'attaque de la surface par le fluide dans le cas des écoulements unidimensionnels et coordonnées méridiennes mesurées à partir du pôle dans le cas des écoulements tridimensionnels à symétrie axiale (le pôle est le point oú l'axe de symétrie traverse la surface);

x_k, abscisse des différentes zones;

y, distance normale à la surface comptée positivement vers le sein du fluide;

Z_n, variable définie par:

$$Z_n = \left(\frac{4}{3\gamma(\xi_n - \xi_{n-1})}\right)^{1/3} \sqrt{4};$$

α, défini par: $\alpha = 3\theta_2^* = \dfrac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}$;

β, défini par: $\beta = 3\left(\dfrac{z_3}{z_2}\right)^{-3} \theta_3^* = \dfrac{\xi_4 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_1}$;

$\Gamma(u)$, fonction gamma de la variable u;

γ, défini par $\gamma = D\sqrt{(2S_0)}$;

$\gamma^{(1)}$, défini par:

$$\gamma^{(1)} = (-1)^{i_1} \frac{\Gamma(i_1 + \frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} b_{i_1} = (-3)^{-i_1} a_{i_1} b_{i_1};$$

$\gamma^{(2)}$, défini par: $\gamma^{(2)} = \dfrac{(-1)^{i_1}}{\Gamma(i_1+2)} \cdot \dfrac{a_{i_1} b_{i_1} a_{i_2}}{c_{i_1, i_2}}$;

$\gamma^{(3)}$, défini par:

$$\gamma^{(3)} = \frac{(-1)^{i_1}}{\Gamma(i_1+2)} \cdot \frac{a_{i_1} b_{i_1}}{c_{i_1, i_2}} \cdot \frac{(3)^{i_2}}{\Gamma(i_2+1)} \cdot \frac{a_{i_2}}{b_{i_2, i_3}} \cdot b_{i_3};$$

$\gamma^{(2n)}$, défini par:

$$\gamma^{(2n)} = \frac{(-1)^{i_1}}{\Gamma(i_1+2)} \frac{a_{i_1} b_{i_1}}{c_{i_1, i_2}} \frac{(3)^{i_2}}{\Gamma(i_2+1)} \frac{a_{i_2}}{b_{i_2, i_3}} \times \frac{(3)^{i_3}}{\Gamma(i_3+2)} \frac{b_{i_3}}{c_{i_3, i_4}} \cdots \frac{(3)^{i_{2n-1}}}{\Gamma(i_{2n-1}+2)} \times \frac{b_{i_{2n-1}}}{c_{i_{2n+1}, i_{2n}}} a_{i_{2n}};$$

$\gamma^{(2n+1)}$, défini par:

$$\gamma^{(2n+1)} = \frac{(-1)^{i_1}}{\Gamma(i_1+2)} \frac{a_{i_1} b_{i_1}}{c_{i_1, i_2}} \frac{(3)^{i_2}}{\Gamma(i_2+1)} \frac{a_{i_2}}{b_{i_2, i_3}} \times \frac{(3)^{i_3}}{\Gamma(i_3+2)} \frac{b_{i_3}}{c_{i_3, i_4}} \cdots \frac{(3)^{i_{2n}}}{\Gamma(i_{2n}+2)} \times \frac{a_{i_{2n}}}{b_{i_{2n}, i_{2n+1}}} \cdot b_{i_{2n+1}};$$

$\gamma^{*(2n+1)}$, défini par:

$$\gamma^{*(2n+1)} = \frac{(-1)^{i_1}}{\Gamma(i_1+2)} \frac{a_{i_1} b_{i_1}}{c_{i_1, i_2}} \frac{(3)^{i_2}}{\Gamma(i_2+1)} \frac{a_{i_2}}{b_{i_2, i_3}} \cdots \frac{(3)^{i_{2n-1}}}{\Gamma(i_{2n-1}+2)} \frac{b_{i_{2n-1}}}{c_{i_{2n}, i_{2n+1}}} \frac{(3)^{i_{2n}} a_{i_{2n}}}{\Gamma(i_{2n}+1) b_{i_{2n}}}.$$

θ_n, variable définie par: $\theta_n = \dfrac{\xi - \xi_n}{3(\xi_n - \xi_{n-1})}$;

θ_n^*, défini par: $(\theta_n)_{\xi = \xi_{n+1}}$;

$\psi_{(x,y)}$, fonction de courant de l'écoulement définie par les relations:

$$V_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V_y = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$\xi_{(x)}$, variable définie par:

$$\xi = \int_0^x r_{(x)}^{3/2} f_{(x)}^{1/2} \, dx.$$

1. INTRODUCTION

SOIT une surface solide en contact avec un fluide en écoulement. Appelons zone active une zone oú existe un gradient pariétal non nul de concentration, ou de température, et zone inactive une zone oú ces mêmes gradients sont nuls. Délimitons sur la surface une succession de zones alternativement actives et inactives. On suppose le fluide à propriétés physiques constantes, le régime permanent, les nombres de Schmidt et de Prandtl supérieurs à l'unité.

On calcule la distribution spatiale de la concentration, ou de la température, au-dessus de chaque zone active ou inactive ainsi que les flux limites de diffusion, ou de conduction, sur les zones actives, compte-tenu de leurs intéractions.

Ce calcul est valable pour les écoulements unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels à symétrie axiale. L'hypothèse fondamentale consiste à prendre pour la composante en x de la vitesse relative du fluide dans la couche limite, unc expression de la forme:

$$V_x \simeq S_0 f(x) y$$

oú S_0 est indépendant des coordonnées x et y et oú $f(x)$ est une fonction de x.

Cette hypothèse est valable dans la couche limite laminaire et dans la sous-couche laminaire en régime turbulent, c'est-à-dire très près de la paroi [1]. (Précisément, aux nombres de Prandtl et de Schmidt élevés, nous étudions des phénomènes près de la surface.) Elle est indépendante de la loi de comportement du fluide et les résultats obtenus sont valables pour les fluides visqueux, Newtoniens ou non.

2. FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME EN REGIME LAMINAIRE

Repérons les différentes zones par les indices 0, 1, 2, ... étant entendu que la première zone ($n = 0$) est inactive, la seconde ($n = 1$) active, etc. ... Ainsi, la zone d'indice $2n$ est inactive: ($x_{2n} < x < x_{2n+1}$) tandis que la zone d'indice $2n+1$ est active:

$$(x_{2n+1} < x < x_{2n+2}).$$

Il faut résoudre le système différentiel:

$$V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$C = \text{constante} = C_\infty \quad \text{pour} \quad y = \infty \tag{2a}$$

$$C = \text{constante} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } \left| \begin{array}{l} x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ x_3 \leqslant x \leqslant x_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2n+1} \leqslant x \leqslant x_{2n+2}. \end{array} \right. \tag{2b}$$

Pour: $C_{y=0} \neq 0$, la solution du problème se déduit aisément de celle proposée ici en remplaçant C_∞ par $C_\infty - (C)_{y=0}$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } \left| \begin{array}{l} 0 < x < x_1 \\ x_2 < x < x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{2n} < x < x_{2n+1}. \end{array} \right. \tag{2c}$$

Par changement de variables, ce système s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} = \gamma \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sqrt{\psi}\frac{\partial C}{\partial \psi}\right) \tag{3}$$

$$C \to C_\infty \text{ pour } \psi \to \infty \tag{4a}$$

$$C = 0 \text{ pour } \psi = 0 \text{ et } \left| \begin{array}{l} \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2 \\ \xi_3 \leqslant \xi \leqslant \xi_4 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi_{2n+1} \leqslant \xi \leqslant \xi_{2n+2} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \tag{4b}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \text{ pour } \psi = 0 \text{ et } \left| \begin{array}{l} 0 < \xi < \xi_1 \\ \xi_2 < \xi < \xi_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi_{2n} < \xi < \xi_{2n+1} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \tag{4c}$$

Soit encore, sur chaque zone d'indice $n \geqslant 1$, en effectuant un nouveau changement de variables:

$$\frac{\partial^2 C_n^+}{\partial Z_n^2} = Z_n \frac{\partial C_n^+}{\partial \theta_n} \tag{5a}$$

$$Z_n \to \infty, \quad C_n^+ \to 0$$

$$Z_n = 0, \quad 0 \leqslant \theta_n \leqslant \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{3(\xi_n - \xi_{n-1})}$$

$$\frac{\partial C_n^+}{\partial Z_n} = 0 \text{ si } n \text{ est pair (zone inerte).} \tag{5b}$$

Dans ce cas, l'égalité est exclue dans la condition pour θ_n. $C_n^+ = -1$ si n est impair (zone active)

$$\theta_n = 0, \; C_n^+(\theta_n, Z_n) = C_{n-1}^{+0}(Z_{n-1}) = C_{n-1}^{+0}(Z_n). \tag{5c}$$

3. RESOLUTION DU PROBLEME

La transformée de Laplace de C_n^+ par rapport à θ_n donne à la place de (5a) l'équation:

$$\frac{\partial^2 \overline{C_n^+}}{\partial Z_n^2} = Z_n(S_n \overline{C_n^+} - C_{n-1}^{+0}). \tag{6}$$

Soit:

$$\frac{\partial^2 \overline{C_n^+}}{\partial (Z_n S_n^{1/3})^2} - (Z_n S_n^{1/3})\overline{C_n^+} = -\frac{Z_n C_{n-1}^{+0}}{S_n^{2/3}}. \tag{7}$$

La solution générale de l'équation homogène est classique [2] et se présente comme une combinaison linéaire, soit des fonctions:

$A_i(Z_n S_n^{1/3})$ et $B_i(Z_n S_n^{1/3})$; soit des fonctions;

$A_i(Z_n S_n^{1/3})$ et $A_i(Z_n S_n^{1/3} e^{\frac{2\pi i}{3}})$; soit des fonctions:

$A_i(Z_n S_n^{1/3})$ et $A_i(Z_n S_n^{1/3} e^{-\frac{2\pi i}{3}})$.

La solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation complète. Les conditions aux limites permettent de calculer les coefficients de proportionnalité dans la combinaison linéaire. Il vient, si la zone est active:

$$\overline{C_n^+} = \sum_{m=0}^{\infty} S_n^{-(m+1)}\left(\frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2}{\partial Z_n^2}\right)^m C_{n-1}^{+0} - \frac{A_i(Z_n S_n^{1/3})}{A_i(0)} \times \left[\frac{1}{S_n} + \sum_{m=0}^{\infty} S_n^{-(m+1)}\left(\frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2}{\partial Z_n^2}\right)^m C_{n-1}^{+0}\right]_{Z_n=0}. \tag{8}$$

Si la zone est inactive:

$$\overline{C_n^+} = \sum_{m=0}^{\infty} S_n^{-(m+1)}\left(\frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2}{\partial Z_n^2}\right)^m C_{n-1}^{+0} - \frac{A_i(Z_n S_n^{1/3})}{A_i'(0)} \times \left[\sum_{m=0}^{\infty} S_n^{-(m+4/3)}\left(\frac{\partial}{\partial Z_n}\frac{1}{Z_n}\frac{\partial}{\partial Z_n}\right)^m \frac{\partial C_{n-1}^{+0}}{\partial Z_n}\right]_{Z_n=0}. \tag{9}$$

Le calcul de C_n^+ s'effectue de proche en proche à partir de la zone d'indice zéro. On en déduit les flux sur les surfaces actives. Il vient:

$$C_0 = C_\infty \tag{10}$$

$$C_1 = -C_\infty \frac{A_i'(0)}{A_i(0)} \frac{\theta_1^{-1/3}}{\Gamma(2/3)}\left[\sum_{i_1=0}^{\infty} \gamma^{(1)} \theta_1^{-i_1} \frac{Z_1^{3i_1+1}}{(3i_1+1)!}\right] \tag{11}$$

$$j_1 = D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\frac{3^{-1/3}}{\Gamma(4/3)} C_\infty D\left(\frac{S_0}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{4}{3\gamma(\xi - \xi_1)}\right)^{1/3} r^{1/2} f^{1/2} \tag{12}$$

$$J_1 = K_1 \int_{x_1}^{x_2} j_1(x) r_{(x)} \, dx$$

$$= 0{,}906 D C_\infty K_1 \gamma^{-1/3} S_0^{1/2} (\xi_2 - \xi_1)^{2/3} \tag{13}$$

$$C_2 = C_\infty \frac{\theta_1^{*-1/3}}{\Gamma(2/3)} \frac{(M_{1,2}^{-3}\theta_2)^{1/3}}{\Gamma(4/3)}\left[\sum_{i_2, i_1 = 0}^{\infty} \gamma^{(2)}\left(\frac{M_{1,2}^{-3}\theta_2}{\theta_1^*}\right)^{i_1} \times (M_{1,2}^{-3}\theta_2)^{-i_2} \cdot \frac{Z_1^{3i_2}}{(3i_2)!}\right] \tag{14}$$

$$(C_2)_{y=0} = -\frac{3^{-1/3} C_\infty}{\Gamma(4/3)\Gamma(1/3)} \frac{A_i(0)}{A_i'(0)}\left[\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{(3^{1/3}\theta_2^{1/3}+1)^2}{3^{2/3}\theta_2^{2/3} - 3^{1/3}\theta_2^{1/3} + 1}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{3^{1/3}\theta_2^{1/3}\sqrt{3}}{2 - 3^{1/3}\theta_2^{1/3}}\right)\right]. \tag{15}$$

Cette relation particularisée au cas du disque tournant dans un fluide de Newton est identique à celle que nous avons déjà calculée directement [3]. Nous généralisons donc ici notre précédent travail.

$$C_3 = -C_\infty \frac{A_i'(0)}{A_i(0)} \frac{\theta_1^{*-1/3}}{\Gamma(2/3)} \frac{(M_{1,2}^{-3}\theta_2^*)^{1/3}}{\Gamma(4/3)} \frac{(M_{1,3}^{-3}\theta_3)^{-1/3}}{\Gamma(2/3)} \times \left[\sum_{i_3, i_2, i_1 = 0}^{\infty} \gamma^{(3)} \cdot \left(\frac{M_{1,2}^{-3}\theta_2^*}{\theta_1^*}\right)^{i_1} \cdot \left(\frac{M_{1,3}^{-3}\theta_3}{M_{1,2}^{-3}\theta_2^*}\right)^{i_2} \times (M_{1,3}^{-3}\theta_3)^{-i_3} \cdot \frac{Z_1^{3i_3+1}}{(3i_3+1)!}\right] \tag{16}$$

$$j_3 = 0{,}729 C_\infty D\left(\frac{S_0}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{4}{3\gamma\xi_1}\right)^{1/3} r_{(x)}^{1/2} f_{(x)}^{1/2} \times \frac{\theta_1^{*-1/3}}{\Gamma(2/3)} \frac{(M_{1,2}^{-3}\theta_2^*)^{1/3}}{\Gamma(4/3)} \frac{(M_{1,3}^{-3}\theta_3)^{-1/3}}{\Gamma(2/3)} \times \left[\sum_{i_1, i_2 = 0}^{\infty} \gamma^{*(3)}\left(\frac{M_{1,2}^{-3}\theta_2^*}{\theta_1^*}\right)^{i_1}\left(\frac{M_{1,3}^{-3}\theta_3}{M_{1,2}^{-3}\theta_2^*}\right)^{+i_2}\right] \tag{17}$$

$$J_3 = K_3 \int_{x_3}^{x_4} j_3(x) r(x) \, \mathrm{d}x$$
$$= 0{,}672 C_\infty D^{2/3} S_0^{1/3} \left(\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} \right)^{1/3} (\xi_4 - \xi_3)^{2/3}$$
$$\times \left[\sum_{i_1, i_2 = 0}^{\infty} \frac{\gamma^{*(3)}}{\frac{3}{2} i_2 + 1} \left(\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} \right)^{i_1} \left(\frac{\xi_4 - \xi_3}{\xi_3 - \xi_2} \right)^{i_2} \right]. \quad (18)$$

Soit encore:

$$J_3 = 0{,}906 D C_\infty K_3 \gamma^{-1/3} S_0^{1/2} (\xi_2 - \xi_1)^{2/3}$$
$$\times \left\{ \beta^{2/3} + F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + (1+\alpha+\beta)^{2/3} \right.$$
$$\times \left[1 - F\left[\frac{\alpha}{\beta} (1+\alpha+\beta) \right] \right]$$
$$\left. - \beta^{2/3} [1 - F(\alpha)] - 1 \right\}. \quad (19)$$

Il est intéressant [4] de calculer la quantité:

$$N = \frac{K_3}{K_1} \left(\frac{\xi_4 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_1} \right)^{2/3} \frac{J_3}{J_1}.$$

Nous trouvons:

$$N = \frac{K_3}{K_1} N^*_{(\alpha,\beta)} \text{ avec } N^*_{(\alpha,\beta)}$$
$$= 1 - F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \beta^{2/3}(1 - F(\alpha)) - (1+\alpha+\beta)^{2/3}$$
$$\times \left\{ 1 - F\left[\frac{\alpha}{\beta} (1+\alpha+\beta) \right] \right\}. \quad (20)$$

Cette relation particularisée au disque–anneau tournant dans un fluide de Newton s'kdentifie à l'expression trouvée directement par Albery [4]; elle en constitue donc une généralisation.

En poursuivant les calculs, nous trouvons:

On constate dans les expressions (11), (14), (16)–(19), (21)–(25), la présence d'un crochet contenant une sommation multiple sur les indices $i_1, i_2, \ldots$ L'omission de ce crochet conduit à des expressions approchées des concentrations et des flux. Ces expressions approchées peuvènt être obtenues directement à partir de (8) et (9) en développant les fonctions d'Airy en séries de puissances croissantes de leurs arguments et en ne retenant que le premier terme (ceci est valable aux très faibles valeurs de y). En procédant ainsi, on retrouve pour J_1 l'expression (13) mais les valeurs suivantes pour $J_3, J_5, \ldots, J_{2n+1}$ sont plus faibles de 15 pour cent environ des valeurs expérimentales mesurées.

On peut augmenter la généralité de nos calculs en intégrant la densité du flux sur une zone active de géométrie quelconque située sur la paroi solide. Introduisons à cet effet une troisième coordonnée spéciale l mesurée sur la paroi et orthogonale aux deux coordonnées x et y. L'équation du contour de la zone active constitue une relation $l = l(x)$ entre les coordonnées l et x. Considérons la zone active d'indice $2n+1$. Soient l_{2n+1} et l_{2n+2} respectivement les valeurs minimale et maximale de la fonction $l = l(x)$; $x_{2n+1}(l)$ l'équation du demi-contour lorsque la coordonnée l augmente entre l_{2n+1} et l_{2n+2}; $x_{2n+2}(l)$ l'équation du demi-contour lorsque la coordonnée l diminue entre l_{2n+2} et l_{2n+1}. Il vient pour le flux J_{2n+1} sur la zone active d'indice $2n+1$:

$$J_{2n+1} = \int_{l_{2n+1}}^{l_{2n+2}} \int_{x_{2n+1}(l)}^{x_{2n+2}(l)} j_{2n+1}(x) \cdot r_{(x)} \, \mathrm{d}x \, . \, \mathrm{d}l.$$

Le cas traité dans les paragraphes précédents correspond évidemment à:

$$x_{2n+1}(l) = \text{constante et } x_{2n+2}(l) = \text{constante}.$$

$$C_{2n} = C_\infty \left(\frac{1}{\Gamma(2/3)} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(4/3)} \right)^n \cdot \left(\frac{\theta_{2n}}{\theta^*_{2n}} \right)^{1/3} \cdot \prod_{j=1}^{j=2n} (M_{1,j}^{-3} \theta_j^*)^{1/3(-1)_j}$$
$$\times \left[\sum_{i_{2n}, i_{2n-1}, \ldots, i_1 = 0}^{\infty} \gamma^{(2n)} \cdot (M_{1,2n}^{-3} \theta_{2n})^{-i_{2n}} \cdot \frac{Z_1^{3 i_{2n}}}{(3 i_{2n})!} \left(\frac{\theta_{2n}}{\theta^*_{2n}} \right)^{i_{2n-1}} \prod_{m=1}^{m=2n-1} \left(\frac{M_{1,m+1}^{-3} \theta^*_{m+1}}{M_{1,m} \theta^*_m} \right)^{i_m} \right] \quad (21)$$

$$C_{2n+1} = -C_\infty \frac{A_i'(0)}{A_i(0)} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(2/3)} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(4/3)} \right)^n \cdot \left(\frac{\theta_{2n+1}}{\theta^*_{2n+1}} \right)^{-1/3} \cdot \prod_{j=1}^{j=2n+1} (M_{1,j}^{-3} \theta_j^*)^{1/3(-1)_j}$$
$$\times \left[\sum_{i_{2n+1}, i_{2n}, \ldots, i_1 = 0}^{\infty} \gamma^{(2n+1)} \cdot (M_{1,2n+1}^{-3} \theta_{2n+1})^{-i_{2n+1}} \frac{Z_1^{3 i_{2n+1} + 1}}{(3 i_{2n+1} + 1)!} \left(\frac{\theta_{2n+1}}{\theta^*_{2n+1}} \right)^{i_{2n}} \prod_{m=1}^{m=2n} \left(\frac{M_{1,m+1}^{-3} \theta^*_{m+1}}{M_{1,m}^{-3} \theta^*_m} \right)^{i_m} \right] \quad (22)$$

$$j_{2n+1} = D \left(\frac{\partial C_{2n+1}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0{,}729 C_\infty D \left(\frac{S_0}{2} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{4}{3\gamma(\xi_1 - \xi_0)} \right)^{1/3} r_{(x)}^{1/2} \cdot f_{(x)}^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(2/3)} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(4/3)} \right)^n$$
$$\times \prod_{j=1}^{2n+1} (M_{1,j}^{-3} \theta_j^*)^{1/3(-1)_j} \cdot \left[\sum_{i_{2n}, \ldots, i_1 = 0}^{\infty} \gamma^{*(2n+1)} \cdot \left(\frac{\theta_{2n+1}}{\theta^*_{2n+1}} \right)^{i_{2n} - 1/3} \cdot \prod_{m=0}^{2n} \cdot \left(\frac{M_{1,m+1}^{-3} \theta^*_{m+1}}{M_{1,m}^{-3} \theta^*_m} \right)^{i_m} \right] \quad (23)$$

$$J_{2n+1} = K_{2n+1} \int_{2n+1}^{2n+2} j_{2n+1}(x) r(x) \, \mathrm{d}x = 1{,}0935 C_\infty D^{2/3} S_0^{1/3} \left(\frac{1}{\Gamma(2/3)} \right)^{n+1} K_{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(4/3)} \right)^n (\xi_{2n+2} - \xi_{2n+1})$$
$$\times \prod_{j=1}^{2n+1} (\xi_{j+1} - \xi_j)^{1/3(-1)_j} \cdot \left[\sum_{i_{2n}, \ldots, i_1 = 0}^{\infty} \frac{\gamma^{*(2n+1)}}{\frac{3}{2} i_{2n} + 1} \prod_{m=1}^{2n} \left(\frac{\xi_{m+2} - \xi_{m+1}}{\xi_{m+1} - \xi_m} \right)^{i_m} \right] \quad (24)$$

Le flux total J_T sur toutes les surfaces actïves en nombre égal à i est donc:

$$J_T = 0{,}8076 C_\infty D^{2/3} S_0^{1/3} \sum_{n=0}^{n=i-1} \left\{ K_{2n+1} \left(\frac{1}{\Gamma(2/3)\,\Gamma(4/3)} \right)^n \cdot (\xi_{2n+2} - \xi_{2n+1}) \cdot \prod_{j=1}^{j=2n+1} (\xi_{j+1} - \xi_j)^{1/3(-1)_j} \right.$$
$$\left. \times \left[\sum_{i_{2n}, \ldots, i_1 = 0}^{\infty} \frac{\gamma^{*(2n+1)}}{\frac{3}{2} i_{2n} + 1} \prod_{m=1}^{m=2n} \left(\frac{\xi_{m+2} - \xi_{m+1}}{\xi_{m+1} - \xi_m} \right)^{i_m} \right] \right\}. \quad (25)$$

4. L'ECOULEMENT EST TURBULENT

En régime turbulent, au voisinage du bord d'attaque d'une surface active par le fluide, le flux de diffusion moyen peut être calculé comme précédemment, en résolvant l'équation différentielle de la diffusion convective à condition de considérer les valeurs moyennes des grandeurs physiques. On dit qu'au voisinage du bord d'attaque de la surface active, le régime de diffusion turbulente est non établi [5]. Ainsi, les calculs qui précèdent sont valables en régime de diffusion turbulente non établi.

Il en va tout autrement loin du bord d'attaque de la surface active par le fluide car les résultats théoriques obtenus en régime de diffusion turbulente non établi ne sont plus vérifiés par l'expérience. On dit dans ce cas que le régime de diffusion turbulente est établi [5]. Dans cette zone, on calcule la densité j du flux de diffusion turbulente en posant par hypothèse que:

$$j \sim \frac{DC_\infty}{\delta}$$

oú δ est l'épaisseur de la couche limite de diffusion. Par une analyse dimensionnelle, on relie ensuite δ à l'épaisseur δ_0 de la sous-couche visqueuse ou à la vitesse de frottement V_0:

$$V_0 = \sqrt{\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}$$

(ρ est la masse volumique et τ la tension de frottement). Cette méthode suppose donc connue la loi de comportement du fluide. Ainsi, pour un fluide d'Otswald nous trouvons [5]:

$$j \sim D^{2/3} N^{-2/3} \varepsilon V_0^{\frac{4-\varepsilon}{3\varepsilon}} . C\;8$$

oú $\Omega = \rho N$ est l'indice de consistance du fluide et ε son indice de comportement. Pour un fluide de Newton ($\varepsilon = 1$), cette expression se réduite à:

$$j \sim D^{2/3} \nu^{-2/3} V_0 C_\infty$$

oú ν est la viscosité cinématique. Cette dernière relation a déjà été vérifiée par l'expérience [6].

Ainsi, pour étendre notre théorie à des surfaces actives en régime de diffusion turbulente établies, nous devons effectuer de nouveaux calculs. Dans ce but, nous posons par hypothèse que derrière une surface active la relaxation de diffusion obéit à des lois qui peuvent être prévues par résolution de l'équation de la diffusion convective, étant déjà entendu que l'on considère des grandeurs moyennes. Nous traitons ci-dessous le cas du fluide d'Otswald qui admet le fluide de Newton comme cas particulier. Nous trouvons alors sans difficultés:

1. *Sur la première surface active (zone d'indice* 1)

$$j_1(x) = a_1 C_\infty D^{2/3} N^{-1/6} S_0^{\frac{4-\varepsilon}{6}} f(x)^{\frac{4-\varepsilon}{6}}$$

oú a_1 est une constante numérique inconnue.

$$C_1(x, y) = j_1(x) y D^{-1}$$

$$J_1 = K_1 \int_{x_1}^{x_2} j_1(x) . r(x) \, dx.$$

2. *Sur la zone inerte en aval de la première surface active (zone d'indice* 2)

$$C_2 = -\frac{A_i(0)}{A_i'(0)} \frac{1}{\Gamma(4/3)} a_1 C_\infty N^{-1/6} S_0^{\frac{2-\varepsilon}{6}} f_{(x=x_2)}^{\frac{1-\varepsilon}{6}} \times r_{(x=x_2)}^{-1/2} (\xi - \xi_2)^{1/3}.$$

On remarque que C_2 ne dépend pas de y. Cela provient du fait que C_1 est proportionnel à y. Cette approximation est valable uniquement très près de la surface et elle entraîne comme conséquence que l'expression pour C_2 n'est valable qu'au voisinage du bord de fuite de la première surface active, c'est-à-dire pour $\xi - \xi_2$ assez petit.

3. *Sur la seconde surface active*

La densité $j_3(x)$ est donnée par la même expression que $j_1(x)$. Donc:

$$J_3 = K_3 \int_{x_3}^{x_4} j_3(x) r(x) \, dx.$$

On en déduit:

$$\mathscr{L} = \frac{J_3}{J_1} = \frac{K_3}{K_1} \left\{ \int_{x_3}^{x_4} j_3(x) r(x) \, dx \Big/ \int_{x_1}^{x_2} j_1(x) r(x) \, dx \right\} \text{ et } N = 0$$

en appelant N le facteur de collection des deux surfaces d'indices 1 et 3, au sens d'Albery [4].

4. *Généralisation*

La généralisation de ces résultats aux zones d'indices supérieures est immédiate. Il vient:

$$J_{2n+1} = K_{2n+1} \int_{x_{2n+1}}^{2n+2} j_{2n+1}(x) r(x) \, dx \text{ avec } j_{2n+1}(x) = j_1(x).$$

5. *Cas particulier oú la seconde surface active est en régime de diffusion turbulente non-établi*

Le calcul de J_3 s'effectue alors en résolvant l'équation de la diffusion convective suivant la méthode que nous avons développée en régime laminaire. On trouve:

$$J_3 = \frac{3}{2\sqrt{(4/3)}\sqrt{(2/3)}} K_3 a_1 C_\infty N^{-1/6} S_0^{\frac{2-\varepsilon}{6}} f_{(x=x_2)}^{\frac{1-\varepsilon}{6}} \times r_{(x=x_2)}^{-1/2} (\xi_3 - \xi_2)^{1/3} (\xi_4 - \xi_3)^{2/3}.$$

Par suite:

$$\mathscr{L} = \frac{J_3}{J_1} = 1{,}24 \frac{K_3}{K_1} f_{(x=x_2)}^{\frac{1-\varepsilon}{6}} r_{(x=x_2)}^{-1/2} (\xi_3 - \xi_2)^{1/3} \times (\xi_4 - \xi_3)^{2/3} \Big/ \left\{ \int_{x_1}^{x_2} f_{(x)}^{\frac{4-\varepsilon}{6}} r(x) \, dx \right\}.$$

$$N = \frac{K_3}{K_1} \frac{(\xi_4 - \xi_3)^{2/3}}{\int_{x_1}^{x_2} f^{\frac{4-\varepsilon}{6}}(x) r(x) \, dx} \times \left\{ \frac{0{,}906}{2^{1/6} a_1} N^{1/6} S_0^{\frac{\varepsilon-2}{6}} - 1{,}24 f_{(x=x_2)}^{\frac{1-\varepsilon}{6}} \times r_{(x=x_2)}^{-1/2} (\xi_3 - \xi_2)^{1/3} \right\}.$$

5. CONCLUSIONS

A partir de nos calculs, il est possible de déterminer les conditions qui permettent d'améliorer les performances d'un échangeur de chaleur ou d'un réacteur hétérogène.

On constate que, par exemple, pour augmenter le flux, on peut augmenter soit S_0, c'est-à-dire la vitesse d'écoulement du fluide, soit la surface active. Ces circonstances sont connues depuis fort longtemps et déjà exploitées: ainsi, le flux est plus grand en régime turbulent qu'en régime laminaire et souvent on augmente la turbulence du fluide en introduisant dans l'écoulement différents obstacles; une autre méthode connue consiste à travailler en "lit fixe" où la surface active est constituée par la surface totale d'une multitude de grains actifs entassés les uns sur les autres.

Notre calcul permet de proposer une autre méthode basée sur la multiplication des phénomènes naissants. Le principe en est simple: soit une surface active plongée dans un écoulement. Sur cette surface, les couches limites se développent de sorte que la densité du flux est grande au voisinage du bord d'attaque où le phénomène de transfert prend naissance mais diminue lorsqu'on s'éloigne de ce bord d'attaque. Au voisinage du bord d'attaque, nous parlerons de phénomène de transfert naissant. Notre méthode consiste à découper la surface en une succession de zones actives alternant avec des zones inactives. Ceci permet de multiplier les phénomènes naissants et donc d'augmenter considérablement la densité moyenne du flux. Bien entendu, la géométrie des zones actives et inactives permettant d'optimiser les performances du réacteur ou de l'échangeur dépendent des conditions expérimentales. Mais, précisément, nos calculs permettent d'effectuer cette optimisation.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York (1968).
2. M. Abramowitz et A. Segun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York (1964).
3. A. Laghouiter, P. Dumargue, D. Bodiot et M. Daguenet, Application des microélectrodes à l'étude de la relaxation de diffusion en aval d'un disque et d'un anneau tournant actifs en régime laminaire, *C.R. Hébd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **279B**, 83–86 (1974).
4. W. J. Albery, Ring–disc electrodes, *Trans. Faraday Soc.* **62**(1), 915–1920 (1966).
5. M. Meklati et M. Daguenet, Etude de la diffusion turbulente sur des surfaces lisses et rugueuses dans un liquide de Newton et d'Otswald, *J. Chim. Phys.* **2**, 262–264 (1975).
6. M. Daguenet, Etude du transfert de matière en solution à l'aide des électrodes à disque et à anneau tournants, *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, 1581–1596 (1968).

THEORETICAL STUDY OF THE DIFFUSION OR CONDUCTION FLUXES ON A FINITE NUMBER OF ACTIVE SURFACES IN INTERACTION, ONE WITH ANOTHER, SEPARATED BY INERT ZONES, IN A NEWTONIAN OR NON-NEWTONIAN VISCOUS FLUID IN LAMINAR OR TURBULENT FLOW

Abstract—We calculate the distribution of the concentration or the distribution of the temperature above a series of zones alternatively inactive and active and also the diffusion or conduction fluxes on the active zones, by considering their interaction.

This calculation can be applied to one-dimensional flows, two-dimensional flows, and axially symmetrical three-dimensional flows. It is independent of the behaviour law of the viscous fluid.

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DES DIFFUSIONS- UND WÄRMESTROMS ÜBER EINER ENDLICHEN ANZAHL DURCH INERTZONEN VONEINANDER GETRENNTER, SICH GEGENSEITIG BEEINFLUSSENDER AKTIVER FLÄCHEN IN LAMINARER ODER TURBULENTER ANSTRÖMUNG DURCH NEWTONSCHE ODER NICHT-NEWTONSCHE FLUIDE

Zusammenfassung—Aufgrund ihrer Wechselwirkungen wird die Konzentrations- oder Temperaturverteilung über abwechselnd inaktiven und aktiven Zonen berechnet und auch die Diffusions- oder Leitungsströme an den aktiven Zonen. Diese Berechnung ist anwendbar auf eindimensionale und zweidimensionale Strömungen sowie auf axial-symmetrische dreidimensionale Strömungen. Sie erweist sich als unabhängig von den Gesetzmäßigkeiten der zähen Flüssigkeiten.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ИЛИ КОНДУКЦИОННЫХ ПОТОКОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ АКТИВНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, РАЗДЕЛЕННЫХ ДРУГ ОТ ДРУГА ИНЕРТНЫМИ ЗОНАМИ, В ВЯЗКОМ ПОТОКЕ НЬЮТОНОВСКОЙ ИЛИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ИЛИ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Аннотация — Расчитывается распределение концентрации или распределение температур над рядом попеременно неактивных и активных зон, а также диффузионные или проводящие потоки в активных зонах при их взаимодействии.

Этот расчет может быть применен к одномерным, двумерным и аксиально симметричным трехмерным потокам. Он не зависит от закона изменения вязких жидкостей.